マクロな系のHilbert空間の構造と観測の理論

慶大・理工　福　田　礼次郎

A.

マクロな系に量子力学を適用する際は量子化された場の理論を用いると都合がよい。系を簡単の為local な boson 場 $\varphi(\mathbf{x})$（とその共役量 $\pi(\mathbf{x})$）で記述する。 まずマクロな系には示強変数と示量変数があることに注意する。体積をVとして示強変数を2つのクラスに分ける。

クラスⅠ …… 平均操作で表わされるもの

$$例：\frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\,\varphi(\mathbf{x}),\quad \frac{1}{V}\int d^3\mathbf{x}\int d^3\mathbf{y}\,\varphi(\mathbf{x})C(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})$$

クラスⅡ …… local な情報をもつもの

$$例：\varphi(\mathbf{x}),\quad \pi(\mathbf{x}),\quad \int d^3\mathbf{y}\,C(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})$$

さて，マクロな系を $V\to\infty$ で表現することにすると，このlimit では示量変数は Hilbert space の operator としては存在しない。行列要素が ∞ となるからである。一方，クラスⅠの示強変数は flnctuation を失うことが知られている。これは数学で言う大数の法則，もっと詳しくは中心極限定理であり，物理では stationary phase で証明できる。このクラスの operator は c-number となるということであり，fluctuation を失うということの証明にもこの c-number の時間発展を決めるにも，素粒子で使われる effection action Γ を用いるとよい。これは系の Hamiltonian H^M が与えれば一般的な ruleで計算できる。

そこで，クラスⅠの任意の operator A の effective action を $\Gamma[a]$ として計算すれば

$$\partial\Gamma[a]/\partial a(t)=0$$

が c-number $a(t)$ の運動を決める。 $a(t)$ はAの〝期待値〟ではなく，A自身が $V\to\infty$ で単位行列となるのである。示量変数とクラスⅠの示強変数が operatorではなくなるので，Hilbert 空間はクラスⅡの示強変数で定義される。クラスⅠの c-number の値 $a(t)$ は Hilbert 空間を指定するパラメーターとなっており，1つ1つの c-number 値に対して各々 Hilbert 空間が対応する。この様な事情は，素粒子・原子核・物性を通じて多数の実例が存在する。このことは，クラスⅠの示強変数の値をシフトできる operator は示量変数であるが，示量変数は，マクロな limitでは存在しないので，結局クラスⅠの変数は1つの Hilbert 空間では1つの値しかとれないことに対応している。つまり，クラスⅠの変数の異なる値を結びつけるoperatorは存在しないのである。

B.

上述のような構造をもったマクロな系である観測装置に測定しようとする object を入射させる。object の状態ベクトルを $|0>_t$，測定器のそれを $|\Psi>_t$ とすると，両者の相互作用以前は全系は

$$|0>_t\,|\Psi>_t$$

で記述される。測定したい object の変数を Λ とし，

$$\Lambda|\lambda_i>=\lambda_i|\lambda_i>$$

で固有ベクトル $|\lambda_i>$ を定義して，

$$|0>_t=\sum C_i(t)|\lambda_i>$$

と仮定する。簡単のため以下では $C_i(t)$ は t の given function として，測定器が object の運動に及ぼす影響 (back reaction) を無視する。一般に，測定過程の満たすべき条件として

(i) $$|0>_t\,|\psi>_t=\sum_i C_i(t)|\lambda_i>|\psi>_t$$

$$\xrightarrow[\text{両者の相互作用の後}]{}\ \sum_i c_i(t)|\lambda_i>|\psi,\ i>_t\equiv\sum_i|i>$$

ここで，$|\psi,\ i>$ とは object の状態 i に対応した測定器の状態という意味である。

(ii) 異なる i に対応する状態ベクトル $|i>$ と $|i'>$ とは全く incoherent である。〝incoherent〞とはいかなる well-defined な operator $|i>$ と $|i'>$ を結びつけることはできないということである。このことについてもう少しはっきりさせる必要がある。いま Λ という変数を測定したとき，object と測定器の相互作用の後では

$$({}_t<\Psi|\,{}_t<0|)\,\Lambda\,(|0>_t\,|\Psi>_t)=\sum_i|C_i(t)|^2$$

となり，上述(ii)の要請とは無関係に確率解釈を可能にする。(ii)の要請は(i)が起こったあと任意の operator P(object に関するものでも，測定器に関するものでも，第2の測定をするときはその新しい自由度に関するものでもすべてを含む) に対して，$|i>$ と $|i'>$ は $i\neq i'$ ならば，干渉項を与えないという要請であって，このことは量子力学の確率解釈を可能にするために必要なことである。

さて，我々の場合，上述の(i)(ii)が成立していることを見よう。Object と測定器の相互作用を $H^{0M}(\Lambda,\ \varphi,\ \pi)$ とすると， total Hamiltonian H は，

$$H=H^0+H^M+H^{0M}(\Lambda,\ \varphi,\ \pi)$$

と書ける。全系は，

$$e^{-iH(t-t_0)}\,|0>_{t_0}|\Psi>_{t_0}=\sum_i C_i(t)\,e^{-iH(t-t_0)}\,|\lambda_i>|\Psi>_{t_0}$$

で時間発展するが，1つ1つの channel $|\lambda_i>$ では

$$H^{0M}(\Lambda,\varphi,\pi)=H^{0M}(\lambda_i,\varphi,\pi)$$

と書けるので，測定器の Hamiltonian は

$$H^M+H^{0M}(\lambda_i,\varphi,\pi)$$

となる。ここで，次の重要な observation を行う。

測定器で読み取る量はすべてクラスⅠの示強変数である。例えば，針の位置， grain density, current density 等である。 このことは，測定には不可避な誤差がつきまとうからというのではない。(この誤差論的なものに関して著者はいかにして数学的に満足のいく formulation ができるのか知らない。) そうではなくてクラスⅠの operater には fluctuation がないから，というのが上の observation の理由であって，これによって量子力学の測定問題も Newton 力学の測定問題と同じレベルへ持っていくことができる。ただし，なぜ $|C_i|^2$ が確率かというもっと fundamentalな議論は別にしての話であるが。

さて Λ を測定するクラスⅠの operator を A とし，A が objectとの相互作用の結果どういう運動をするかは，$H^M(\varphi,\pi)+H^{0M}(\lambda_i,\varphi,\pi)$ を Hamiltonian と思って effective action $\Gamma[\lambda_i, a]$ をつくり，

$$\partial\Gamma[\lambda_i, a]/\partial a(t)=0$$

から，$a(t)$ を決めればよい。

この解は i によるので，条件(i)は満たされる。$a(t)$ の値が異なると，異なる Hilbert space が定まるので，$|i>$ と $|i'>$ は $i\neq i'$ なら干渉しない。つまりどんな operator P を持ってきても $|i>$ と $|i'>$ とはつながらない：

$$({}_t<\Psi|\,{}_t<0|)\,P\,(|0>_t\,|\Psi>_t)$$

に $i\neq i'$ なる非対角項は効かない。これは条件(ii)の要請である。

現実では，$V=\infty$ ではなく，干渉項は残る。この干渉項が残っていれば (V が有限なら) もとの pure state へ状態を回復することができる。それはこのときには示量変数が存在して，クラスⅠの operator の異なる値の間をつないでシフトさせることができるからである。これはクラスⅠの operator が fluctuate しはじめる，と言っても良い。

詳しくは， “Macroscopic Variables of Macroscopic Systems and the Theory of Measurement” R. Fukuda, (to appear in Phys. Rev. A) をご参照下さい。